UNIVERSITÄT OSNABRÜCK	**Physik-Probestudium**	V 01
	Fadenpendel und Reversionspendel	Schnieder
Fachbereich 06		18.12.24

Schwingungen des Fadenpendels und des Reversionspendels

Ziele

- Geduldiges und genaues Messen
- Eigenschaften des Fadenpendels, mögliche Fehlerquellen bei der g-Bestimmung
- Kennenlernen des Reversionspendels
- Präzisionsmessung der Erdbeschleunigung
- Erkennen der Bedeutung einer soliden Fehlerbetrachtung

1 Grundlagen

Ein **mathematisches Pendel** ist ein Gebilde der theoretischen Physik, nämlich ein Massepunkt an einem masselosen Faden. In der realen Welt der Praktika arbeiten wir mit massearmen Fäden, an denen vergleichsweise schwere Kugeln hängen. Es ist üblich, diese Konstrukte **Fadenpendel** zu nennen. Obgleich in recht guter Näherung die theoretischen Ergebnisse des mathematischen Pendels auf das Fadenpendel übertragen werden können, machen Präzisionsmessungen klar, dass es sich beim Fadenpendel um einen Spezialfall eines sogenannten **physikalischen Pendels** handelt. Auch das **Reversionspendel**, Teil 2 dieses Versuchs, ist ein physikalisches Pendel.

Allgemein bezeichnet man als **physikalisches Pendel** einen ausgedehnten Körper, der unter dem Einfluss der Schwerkraft um eine horizontale Achse pendelt. Wenn Sie zum Beispiel eine Stricknadel quer durch eine Salatgurke stechen und die Stricknadel horizontal lagern, so haben Sie ein physikalisches Pendel gebaut. Es ist klar, dass dieses Pendel nur dann pendelt, wenn der Schwerpunkt unterhalb der Drehachse liegt.

Abbildung (1) zeigt ein „Gurkenpendel“ und ein Fadenpendel zum Vergleich. Lassen Sie in Gedanken den Kugelradius gegen null gehen, so steht das rechte Teilbild ebenso für ein mathematisches Pendel.

Da ein mathematisches Pendel wesentlich bekannter ist als ein physikalisches Pendel und da bezüglich der Unterschiede häufig Verwirrung besteht, sollen hier in gebotener Kürze beide Pendel in Zusammenhang gebracht werden.

Behandelt man das Fadenpendel als mathematisches Pendel, so wird die Bewegungsgleichung üblicherweise als dynamisches Kräftegleichgewicht (D'Alembert) zwischen Rückstellkraft $m\,g \sin \Phi$, tangential zur Kreisbahn, und dazu entgegengesetzter Trägheitskraft angesetzt, $m\,g \sin \Phi = -m\,\ddot{x}$.

Mit Φ im Bogenmaß gilt mit Pendellänge l $x = l \cdot \Phi$ und damit die übliche Schreibweise der Bewegungsgleichung

$$m\,l\,\ddot{\Phi} + m\,g\,\Phi = 0\,. \qquad (1)$$

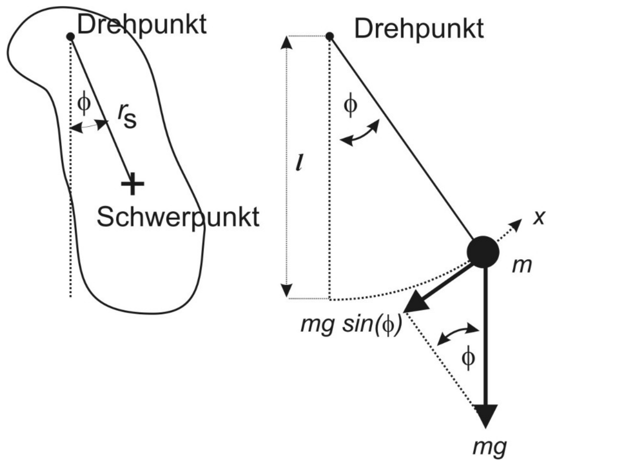

Abbildung 1: Physikalisches Pendel und Fadenpendel oder mathematisches Pendel (Kugel als Punkt auffassen). Rückstellkraft beim Fadenpendel als Projektion der Schwerkraft auf die Kreisbahn. Die krummlinige Koordinate x ist über die Pendellänge l mit dem Winkel Φ verknüpft. Man kann die gleiche Rückstellkraft für den Schwerpunkt des physikalischen Pendels verwenden.

Bei Gleichung (1) wurde zudem die **Kleinwinkelnäherung** $\sin\Phi \simeq \Phi$ (Bogenmaß!) verwendet.

Die Masse kann bei Gleichung (1) gestrichen werden und die bekannte Lösung ist die harmonische Schwingung $\Phi = \Phi_0 \sin(\omega t + \alpha)$ mit der **Periode** oder **Schwingungsdauer** T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (2)$$

Die hier zunächst uninteressante Amplitude Φ_0 und der für dieses Experiment unbedeutende Phasenwinkel α hängen von der **Anfangsbedingung** ab, d. h. davon, wie man das Pendel anwirft.

Die Unabhängigkeit von T von der Masse ruft bei Laien Erstaunen hervor und soll, unter anderem, in diesem Experiment verifiziert werden. Tatsächlich kann jedoch die Ausdehnung der Kugel eine messbare Massenabhängigkeit hervorrufen, was verständlich ist, wenn nun das physikalische Pendel betrachtet wird.

Man könnte versucht sein, das physikalische Pendel in einzelne Massenelemente dm_i zu zerlegen und für jedes dm_i ein D'Alembertsches dynamisches Kräftegleichgewicht wie beim Fadenpendel aufzustellen. Ein solcher Versuch führt jedoch nicht zum richtigen Ergebnis, da die Massenelemente nicht unabhängig voneinander schwingen, sondern starr miteinander verbunden sind. Dies führt zu weiteren Bedingungen, sogenannten Zwangsbedingungen, für die Kräfte auf die dm_i, die aus der bloßen Forderung nach Kräftegleichgewicht nicht bestimmt werden können.

Derartige Probleme vermeidet man, wenn man mit den bei Drehbewegungen üblichen Größen **Trägheitsmoment**, **Drehmoment** und **Drehimpuls** arbeitet.

Man etabliert die Bewegungsgleichung eines physikalischen Pendels also in sinnvoller Weise durch das „dynamische Drehmomentgleichgewicht", rückstellendes Drehmoment $\vec{M}_\mathrm{r}$ entgegengesetzt gleich Trägheitsdrehmoment $\vec{M}_\mathrm{t}$,

$$\vec{M}_\mathrm{r} = -\vec{M}_\mathrm{t} = -\frac{d}{dt}\vec{L} \,. \qquad (3)$$

Die letzte Gleichheit entspricht dem **Drehimpulssatz**. Alle Vektoren liegen parallel zur Drehachse, sind also eindimensional, weshalb die Vektorpfeile weggelassen werden können und nur die Komponenten zu betrachten sind.

Man setzt nun links in Gleichung (3) als rückstellendes Drehmoment $M_\mathrm{r} = m\,g \sin\Phi\, r_\mathrm{S}$ mit m als Gesamtmasse und r_S als Abstand Drehachse-Schwerpunkt ein, und rechts $L = I\dot{\Phi}$ mit I als Trägheitsmoment bezüglich der vorgegebenen Achse. Damit ergibt sich mit der Kleinwinkelnäherung $\sin\Phi \approx \Phi$ die bekannte Bewegungsgleichung

$$I\ddot{\Phi} + m\,g\,r_\mathrm{S}\Phi = 0 \,. \qquad (4)$$

Gleichung (4) ist mathematisch identisch mit Gleichung (1) und für die Schwingungsdauer folgt

$$T = 2\pi \frac{I}{m\,g\,r_\mathrm{S}} \,. \qquad (5)$$

Den Ausdruck $\frac{I}{m\,r_\mathrm{S}} = l_\mathrm{red}$ nennt man **reduzierte Pendellänge**, da ein mathematisches Pendel dieser Länge die gleiche Schwingungsdauer hat, nämlich $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_\mathrm{red}}{g}}$.

Setzt man beim Fadenpendel $r_s = l$ und $I = ml^2$, so reduziert sich Gleichung (5) zu Gleichung (2). Physikalisch heißt dies, man vereinigt die gesamte Masse (inkl. Faden) in der Kugelmitte und vernachlässigt deren Rotation um ihren Schwerpunkt. Der Ausdruck (5) muss folglich einem realen Fadenpendel viel besser gerecht werden, als die entsprechende Beziehung (2) des mathematischen Pendels. Man kann daher bei Gleichung (2) „Korrekturen" unter Verwendung von Gleichung (5) anbringen. Im Trägheitsmoment I kann nämlich neben $m\,l^2$ das Trägheitsmoment der Kugel der Drehung um ihren Schwerpunkt $\frac{2}{5} m\,r_\mathrm{K}^2$ (r_K = Kugelradius) nach dem Steinerschen Satz berücksichtigt werden. Gleiches gilt für das Trägheitsmoment des Fadens und seinen Beitrag zum Nenner $m\,g\,r_s$. Die endliche Masse des Fadens kommt damit ins Spiel. Diese und weitere Korrekturen beschreiben zum Beispiel **Eichler** und andere in *Das Neue Physikalische Grundpraktikum,* Kapitel 5 (als Springer E-Book über die UB für Sie verfügbar).

1.1 Bestimmung der Erdbeschleunigung *g* mit dem Fadenpendel

Die gerade erwähnten Korrekturen zeigen, dass unter Verwendung der Gleichung (2) die Erdbeschleunigung g am besten für Kugeln mit ausreichend großer Masse bei möglichst kleiner Ausdehnung zu messen sein sollte. Um dies grob zu verifizieren, werden Schwingungsdauern mit unterschiedlichen Fadenlängen l und mit zwei unterschiedlichen Kugelgrößen gemessen. Sie werden sehen, dass allein die Messunsicherheit bei l keine allzu hohe Genauigkeit bei g erwarten lässt.

Schließlich muss noch der Einfluss der Kleinwinkelnäherung untersucht werden. Die Lösung der Gleichung (1) ohne Kleinwinkelnäherung ist elementar nicht möglich. Sie lässt sich in eine Reihe entwickeln und hat die Form

$$T(\Phi_0) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(1 + \frac{\Phi_0^2}{16} + \ldots\right),\ \Phi_0 \text{ im Bogenmaß.} \tag{6}$$

Man muss also für verschiedene Amplituden Φ_0 messen und gegen null extrapolieren. Auch dies sollen Sie versuchen.

Nehmen Sie Abweichungen Ihrer Messwerte vom Literaturwert für Osnabrück, $g = 9{,}8128\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, nicht allzu tragisch. Es ist seit langem bekannt, dass man mit einem speziellen physikalischen Pendel, dem Reversionspendel, g wesentlich genauer messen kann (daher Versuchsteil 2).

1.2 Bestimmung der Erdbeschleunigung *g* mit dem Reversionspendel

Ein Reversionspendel ist nichts anderes als ein physikalisches Pendel mit zwei Aufhängungsmöglichkeiten, also zwei parallelen Drehachsen **A** und **B**, wobei der Schwerpunkt dazwischen liegt, Abbildung (2).

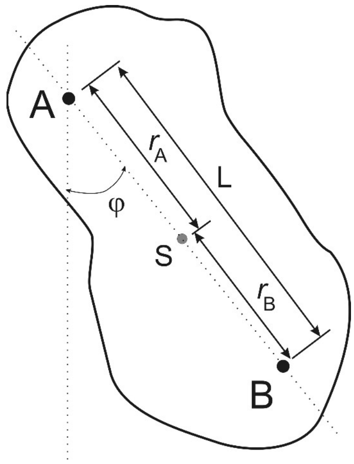

Abbildung 2: Reversionspendel = Physikalisches Pendel mit zwei Aufhängepunkten A *und* B*, dessen Massenverteilung so verändert werden kann (nicht gezeigt), dass* $T_A = T_B$ *gilt.* S *ist der zwischen* A *und* B *liegende Schwerpunkt. Die im Versuch verwendete Bauform wird unten dargestellt.*

Reversion heißt so viel wie „Umkehr“, meist eines Vorgangs oder eines Trends. Hier ist die physische Umkehr des Pendels von Aufhängung A nach B gemeint. Man kann durch Veränderung der Massenverteilung auf dem Pendel bei festem Abstand der Achsen **A** und **B** erreichen, dass die Perioden für Aufhängung in A und B gleich sind.

Aus der Gleichheit $T = T_A = T_B$ kann die Erdbeschleunigung g sehr genau ermittelt werden.

In der angelsächsischen Literatur wird dieses Pendel „Katers Pendulum“ genannt, manche meinen aber, es sei von dem Tübinger Professor von Bohnenberger um 1800 erfunden worden. Mit dem Reversionspendel wurde im 19. Jahrhundert g in vielen Erdteilen sehr genau gemessen. Im Internet finden Sie sicher interessante Geschichten dazu.

Wenn $T = T_A = T_B$ durch Massenverschiebung erreicht ist, so sind auch die dazugehörigen reduzierten Pendellängen gleich, also

$$\frac{I_A}{m r_A} = l_{red}^A = l_{red}^B = \frac{I_B}{m r_B} . \tag{7}$$

Man bemüht nun für beide Trägheitsmomente I_A und I_B den Steinerschen Satz (siehe Lehrbuch),

$$I_{A,B} = m r_{A,B}^2 + I_S . \tag{8}$$

Dabei ist I_S das Trägheitsmoment bezüglich einer zu den Achsen **A** und **B** parallelen Achse durch den Schwerpunkt. Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt

$$l\left(I_S + m r_A^2\right) r_B = \left(I_S + m r_B^2\right) r_A \tag{9}$$

und schließlich

$$\left(r_B - r_A\right)\left(I_S - m r_B r_A\right) = 0 . \tag{10}$$

Eine Lösung dieser Gleichung, $r_A = r_B = \frac{L}{2}$, kann man sofort deuten: Der Schwerpunkt liegt dann in der Mitte zwischen den Achsen, weshalb die Trägheitsmomente I_A und I_B gleich sind Dies folgt aus Gleichung (8). Folglich liegt gleiche Schwingungsdauer vor, also eine triviale Lösung, mit der man aber ohne detaillierte Kenntnis des Pendelaufbaus (unbekanntes I_S) nichts anfangen kann. Bei dem verfügbaren Pendel kann ohnehin der Schwerpunkt nicht in die Mitte geschoben werden.

Die zweite, interessantere Lösung entspricht der Bedingung $I_S = m r_B r_A$ oder

$$r_B = \frac{I_S}{m r_A}, \quad \text{oder auch} \quad r_A = \frac{I_S}{m r_B} . \tag{11}$$

Um diese Bedingung zu deuten, muss man ein wenig argumentieren: Laut Abbildung (2) gilt für den Abstand der Achsen $L = r_A + r_B$. Setzt man hier Gleichung (11) ein, so erhält man

$$L = \frac{I_S + m r_A^2}{m r_A}, \quad \text{oder auch} \quad L = \frac{I_S + m r_B^2}{m r_B} .$$

Der Abstand L entspricht folglich für den Fall $T_A = T_B = T$ genau der reduzierten Pendellänge (siehe oben, Abschnitt nach Gleichung (5).

Hat man $T_A = T_B = T$ gefunden, so kann g berechnet werden gemäß

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}\,. \tag{12}$$

Es existieren andere Argumentationen, von denen die in **Bergmann-Schaefer**, Band 1, vielleicht eleganter als die hier präsentierte erscheinen mag (**Bergmann-Schaefer** ist online via UB verfügbar).

In Gleichung (12) geht nun kein unbekanntes Trägheitsmoment mehr ein. Sie bildet die Basis der *g*-Messung mit dem Reversionspendel. Es muss „nur“ die Schwingungsdauer ermittelt werden, die herrscht, wenn das Pendel um A und um B mit der gleichen Frequenz schwingt. Dies kann mit hoher Genauigkeit erfolgen. Außerdem braucht man „nur“ noch den Abstand der Achsen **A** und **B** zu bestimmen, was ebenfalls sehr präzise geschehen kann. Dabei sei nochmals betont, dass dieser Abstand baulich eine fixe Größe ist. Die Gleichheit $T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B}$ wird durch Veränderung der Massenverteilung erreicht. Dies ist am tatsächlichen Aufbau zu erkennen, der im Abschnitt 2.2 dargestellt ist.

2 Aufgaben und Hinweise

2.1 Messungen mit dem Fadenpendel

Sicherheitshinweis

Achtung: Große Masse!

Die große Kugel hat eine derart große Masse, dass es weh tut, wenn sie auf den Fuß fällt!

Der „Faden“ wird durch einen Draht realisiert, der an einem Ende in einer Halterung aus Messing eingeschraubt ist und am anderen Ende eine Schlaufe besitzt, in die eine Kugel eingehängt werden kann. Es stehen drei Fäden unterschiedlicher Länge l zur Verfügung, die beiden kürzeren sind zusammen an der gleichen Lichtschranke montiert – Sie müssen also immer eines dieser beiden Pendel ruhig stellen, am einfachsten den Draht außen an den vorderen bzw. hinteren Arm der Lichtschranke legen. Zusammen mit den beiden vorhandenen Kugelgrößen sind also mehrere Kombinationen Masse m und Länge l möglich.

Sicherheitshinweis

Achtung: Laserstrahl!

Der Laserentfernungsmesser enthält einen Laser der Klasse 2. Nicht in den Strahl schauen. Benutzung nur entsprechend der Einweisung durch den Betreuer. Schutzbrille tragen!

Die Pendellängen werden mit einem Laserentfernungsmesser gemessen (Grundgenauigkeit 1,5 mm), die Bedienung erklärt der Betreuer. Sie messen jeweils von Kugelunterseite bis zur Aluminiumschiene. Wegen der unterschiedlichen Klemmvorrichtungen (Messingteile in der Aluschiene) müssen für die Pendellänge folgende Werte abgezogen werden: Kurzer Faden: 9 mm, mittlerer Faden: 32 mm und langer Faden: 35 mm (Genauigkeit jeweils ± 1 mm). Der Kugelradius darf natürlich auch nicht vergessen werden.

Es steht ein Lichtschrankensystem (Gabellichtschranke und „XPLORER“ der Firma „Pasco“) zur Verfügung, welches die Messung der Periode übernimmt. Bei der Frage des Gerätes nach angeschlossenem Sensor ist „Lichtschranke und Pendel“ („Photogate and Pendulum“) zu wählen. Achten Sie darauf, dass sich im Lichtweg der Schranke eine Verdickung am Draht befindet, da sonst das Gerät nicht oder nicht richtig zählt. Messen Sie die Periode T als Funktion der Zeit mit grafischer Darstellung. Ist T konstant, so ist dies ein Indiz dafür, dass das Pendel „sauber“ schwingt.

2.1.1 Bestimmung der Erdbeschleunigung unter verschiedenen Bedingungen

Messen Sie für die drei verschieden langen Fadenpendel mit der großen Kugel dreimal für eine

Zeitdauer von etwa 10 T. Der „XPLORER“ bietet eine Mittelungsfunktion. Die „große Kugel“ ist zweifach vorhanden, beide Gruppen können also zumindest an zwei Fäden gleichzeitig messen. Am langen Pendel soll die Kugel nicht ausgehängt werden. Wählen Sie für alle Messungen in diesem Abschnitt eine Anfangsamplitude von etwa 1°.

Bestimmen Sie aus den Ergebnissen im letzten Abschnitt die Erdbeschleunigung g unter Angabe der Messgenauigkeit. Vergleichen Sie mit dem Literaturwert von $9{,}8128\,\mathrm{m/s^2}$ für Osnabrück. Diskutieren Sie kurz die Korrekturen durch die Kugelausdehnung (Dichte Stahl 7,7 g/cm^3) und die Drahtmasse (ebenfalls Stahl), und ggf. auch die Korrektur aus dem Luftauftrieb (siehe **Eichler**).

2.1.2 Unabhängigkeit von der Masse

Messen Sie mit der kleinen Kugel beim mittellangen Faden T wie unter 2.1.1. Vergleichen Sie mit der entsprechenden Messung für die große Kugel. Diskutieren Sie die ggf. vorhandene Diskrepanz.

2.1.3 Schwingungsdauer als Funktion der Anfangsamplitude

Messen Sie die Periode T (aus jeweils zweimal 10 Schwingungen) mit dem langen oder dem mittellangen schweren Pendel für verschiedene Amplituden $\Phi_0 = 2°, 4° \text{ und } 6°$. Die Gruppen sollen sich abstimmen oder gemeinsam arbeiten.

Stellen Sie die Messwerte $T(\Phi_0)$ grafisch dar (1°-Messung aus 2.1.1 nicht vergessen) und versuchen Sie, mit Blick auf Gleichung (6) auf $\Phi_0 = 0$ zu extrapolieren. Wie groß ist der Effekt durch die Kleinwinkelnäherung im Vergleich zu den bisherigen Messgenauigkeiten?

2.2 Beschreibung des Reversionspendels der Fa. Leybold

Das Pendel besteht aus einer rechteckigen Stahlstange (Querschnittsmaße $a = 0{,}6$ cm und $b = 1{,}6$ cm) der Länge $c = 167$ cm, in die zwei Schneiden im Abstand $L = 99{,}4(1)$ cm eingelassen sind. Zwischen den Schneiden, welche die Achsen **A** und **B** bilden, befindet sich eine verschiebbare Masse m_L, die die sogenannte „Laufmasse“ darstellt. Außerhalb der Schneiden ist auf einer Seite eine Zusatzmasse $m_Z > m_L$ in einem festen, aber einstellbaren Abstand y zur Achse **A** angebracht (Abbildung 3).

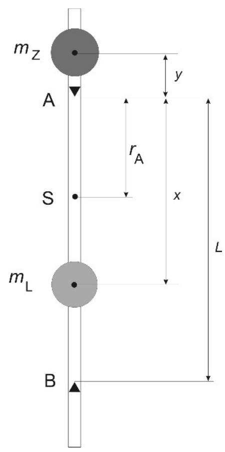

Abbildung 3: Skizze des im Versuch verwendeten Reversionspendels. Die Masse m_Z ist im Versuch ortsfest, m_L wird verschoben. Sie werden also im Versuch die Koordinate x variieren, und damit auch r_A. m_L ist kleiner als m_Z.

Die Massen und Geometrien sind so gewählt, dass für beliebige Positionen der Massen immer $r_A < L/2$ gilt. Es kann gezeigt werden, dass bei diesem Pendel die Bedingung $T_A = T_B$ für zwei Werte von x erfüllt werden kann[1]. Für die entsprechenden Positionen gilt $x_1 >> x_2$. Bei x_2 liegen beide Massen relativ dicht beisammen, weshalb ein kleineres Gesamtträgheitsmoment I_S vorliegt als bei x_1. Daher schwingt das Pendel bei x_1 stabiler und es wird hier nur bei dieser Position gemessen, die zwischen dem aufgeklebten Maßband und der Schneide B liegt.

Verwechseln Sie nicht die beiden Aufhängungen. Wir wollen diejenige Position mit A bezeichnen, bei der m_z oben ist. Erfahrungsgemäß werden T_A und T_B ab und zu vertauscht notiert. Auch deshalb sollen Sie während der Messung die Messpunkte grafisch darstellen, siehe unten.

2.3 Messung der Schwingungsdauer

Die Schwingungsdauer wird mit der Lichtschranke gemessen, die an einem auf dem Fußboden stehenden Stativ angebracht ist.

Die Lichtschranke soll senkrecht zur Schwingungsebene justiert werden, sodass die kleinen Fähnchen am Ende der Pendelstange dicht vor dem Lichtempfänger (kleine Bohrung) vorbeischwingen.

Es empfiehlt sich auch hier, die Periode T als Funktion der Zeit als Grafik aufzuzeichnen. Sie können auf diese Weise erkennen, dass sich T nach einigen 10 s häufig vom Anfangswert entfernt hat, insbesondere wenn die Schwingung nicht gut angeworfen wurde oder bei zu großer Amplitude (mehr als 1 cm am Ende der Stange).

Kontrollieren Sie für eine gewisse Zeit (30 s, besser 60 s), ob die Periode stabil ist. Anderenfalls müssen Sie erneut anwerfen. Bei stabilen T-Werten können Sie die Mittelungsfunktion des „XPLORER"s zur Feststellung des Endwertes verwenden.

2.4 Grobe Messung von T_A und T_B als Funktion von x

Sicherheitshinweis

Achtung: Scharfe Schneiden!

Beim Hantieren mit dem Pendel auf die scharfen Schneiden achten. Achten Sie ebenso beim Drehen des Pendels auf Ihren Nachbarn, die Massen sind nicht unerheblich.

1 Dies folgt im Prinzip aus Gleichung (11), ist aber recht mühsam zu zeigen, da I_S über einige unbekannte, aufbaubedingte Parameter mit x und daher mit r_A zusammenhängt.

Geräteschonung

Die Qualität der Scheiden und der Lagerplatte ist entscheidend für die Güte der Messung. Setzen Sie das Pendel daher vorsichtig auf die Lagerplatte.

Überprüfen Sie den Abstand y der äußeren Masse, siehe Abbildung (3), der etwa bei 10 cm liegen soll (zulässige Grenzen $7 < y < 15$ cm). Protokollieren Sie auch y und halten es im weiteren Versuchsverlauf konstant!

Um die Positionen x_1 der Laufmasse m_L zu finden, bei der $T_A = T_B$ gilt, variiert man zunächst x in groben Schritten von 2 cm und bestimmt T mit der Lichtschranke für möglichst kleine Anfangsamplituden (weniger als 1 cm Auslenkung an der Lichtschranke). Bei dieser Messung kann $T_A(x)$ durchgemessen werden und erst danach $T_B(x)$ (statt bei jedem x-Wert das Pendel zu drehen und beide Zeiten abwechselnd zu messen).

Verwenden Sie zum Einstellen der Anfangsamplituden und zum Loslassen einen Anschlag (Plexiglaswinkel) und finden Sie heraus, wie klein die Amplitude sein darf, damit die Lichtschranke noch richtig arbeitet. Die Messung von x geschieht mit dem auf der Stange aufgeklebten Maßband und einem Lineal. Über legen Sie, inwieweit (a) der Absolutwert und (b) die Genauigkeit der Einstellung von x von Bedeutung ist. Bitte nehmen Sie diese Überlegung in das Protokoll auf.

Tragen Sie während der Messung $T_A(x)$ und $T_B(x)$ in ein und dasselbe Diagramm ein. Wenn Sie keinen PC benutzen, so müssen Sie als erstes die Extremwerte von beiden Schwingungsdauern im angestrebten x-Bereich von 20 - 30 cm ermitteln, damit Sie eine vernünftige Skala verwenden können.

Sie sollten sowohl für $T_A(x)$ als auch für $T_B(x)$ einen leicht gekrümmten Kurvenverlauf finden. Zeichnen Sie die Ausgleichskurven freihändig ein. Der Schnittpunkt liefert ungefähr die gesuchte Zeit $T = T_A = T_B$ und damit auch die ungefähre Position x_1.

Im folgenden Abschnitt werden Sie diese Position x_1 verwenden.

2.5 Präzisionsbestimmung von *g* mit der Näherung nach Bessel

Herr Bessel (bekannt von der Besselfunktion) hat sich ebenfalls mit dem Reversionspendel auseinandergesetzt[2] und unter anderem eine Interpolationsformel für T angegeben, welche eine zeitraubende genaue Ermittlung des Punktes x_1 für $T_A = T_B$ überflüssig macht. Danach reicht es aus, T_A und T_B für ein x in der Nähe des Schnittpunktes zu messen und zusätzlich den Abstand

2 F. W. Bessel, *„Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels"*, Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1826), zitiert und zusammengefasst von D. Candela, K. M. Martini, R. V. Krotkov, K. H. Langley, **American Journal of Physics 69** (2001) 714.

r_A des Schwerpunktes zur Schneide A zu ermitteln. Der Wert für T ergibt sich dann aus

$$T^2 = \frac{T_A^2 + T_B^2}{2} + \frac{T_A^2 - T_B^2}{2} \cdot \left(\frac{L}{2r_A - L}\right). \tag{13}$$

Da g sich lokal relativ wenig ändert, kann man folglich ein Reversionspendel mit festen Massen bauen, für das für ein mittleres g, die Gleichheit $T_A = T_B = T$ gilt. Außerdem kann man im Labor r_A mit großer Sorgfalt bestimmen. Will man g an einem anderen Ort messen, so genügt dort eine möglichst genaue Messung von T_A und T_B. Entsprechende Pendel wurden früher in der Geodäsie (Gravimetrie) verwendet, wobei Genauigkeiten von $10^{-6}g$ bis $2 \cdot 10^{-4}g$ interessant sind.

Aufgabe: Stellen Sie ein x in der Nähe des Schnittpunktes ein (siehe Ihre Grafik aus Messung 2.4), bestimmen Sie T_A und T_B sowie r_A und verwenden Sie Gleichung (Fehler: Verweis nicht gefunden), um g zu ermitteln. Eine Genauigkeitsangabe und ein Vergleich mit dem Literaturwert dürfen nicht fehlen.

r_A kann durch Balancieren auf einer Schneide (ein senkrecht eingespanntes Blech) gemessen werden. Die Fehleranalyse zeigt, dass Δr_A nicht allzu kritisch ist.

2.6 Kurze Gesamtdarstellung der Ergebnisse für *g*

Stellen Sie mittels einer kleinen Tabelle Ihre Ergebnisse <u>aller</u> Messmethoden übersichtlich dar.