

Kundtsches Rohr und Doppler-Effekt

Ziele

- Resonanzbedingung für Schall in einem Rohr
- Sichtbarmachung von stehenden Wellen
- Messung der Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen
- Änderung der Schallfrequenz bei Relativbewegungen von Quelle und Detektor zueinander durch den Doppler-Effekt

1 Grundlagen

Bei **Schallwellen** handelt es sich um mechanische Wellen, die ein materielles Medium (Gas, Flüssigkeit, Festkörper) benötigen. Die Ausbreitung erfolgt als **Longitudinalwelle**, d. h. die Schwingungen des Mediums verlaufen parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Somit stellen Schallwellen **Druck- und Dichteschwankungen** im Ausbreitungsmedium dar.

Wie bei Wellen allgemein besteht zwischen der Frequenz f , der Wellenlänge λ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Zusammenhang

$$v = \lambda \cdot f . \quad (1)$$

Nach Gleichung (1) lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch Messung der Frequenz und der Wellenlänge bestimmen. Dies wird beim **Kundtschen Rohr** untersucht.

1.1 Kundtsches Rohr

In einem einseitig abgeschlossenen Rohr werden stehende Schallwellen erzeugt. Im Bereich der Schwingungsbäuche werden in das Rohr eingebrachte Styroporkugeln aufgewirbelt, in den Schwingungsknoten bleiben sie liegen. Die Wellenlänge kann direkt gemessen werden. Als Wellenerreger dient ein Lautsprecher.

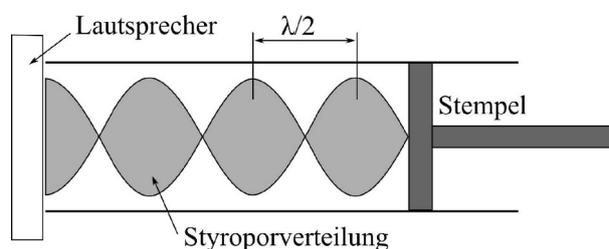


Abbildung 1: Kundtsches Rohr mit stehenden Wellen in Resonanz. Die Schallwelle ist durch die Teilchenbewegung (Schallschnelle) dargestellt.

1.2 Schallausbreitung in Gasen, Messung von Wellenlängen

Die Schallgeschwindigkeit besitzt in verschiedenen Gasen unterschiedliche Werte. Diese Tatsache hängt mit charakteristischen Gasparametern zusammen. Man kann zeigen, dass für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der einfache Zusammenhang

$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (2)$$

gilt, wobei p den Druck und ρ die Dichte des Gases beschreiben. Die Änderung des Gasdrucks dp , hervorgerufen durch eine gewisse (kleine) Änderung $d\rho$ seiner Dichte, bestimmt also die Schallgeschwindigkeit.

Dichteschwankungen in Gasen können nun aber auf zweierlei Art erfolgen. Dabei kann sich die Temperatur ausgleichen, dies benötigt allerdings Zeit. Es handelt sich um einen relativ langsamen Prozess, zu langsam für Dichteschwankungen beim Schall. Vielmehr erfolgen die Dichteschwankungen bei einer Schallwelle so schnell, dass zwischen den Bereichen hohen Drucks (und damit etwas höherer Temperatur) und den Bereichen niedrigen Drucks (also mit etwas niedriger Temperatur) kein Temperatenausgleich stattfinden kann. Dies nennt man eine **adiabatische** Druck/Dichte-Änderung. Für eine solche Zustandsänderung eines Gases gilt

$$p \cdot V^\kappa = \text{const} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (3)$$

Der **Adiabatenkoeffizient** κ enthält c_p , die spezifische Wärme bei konstantem Druck, und c_v , die spezifische Wärme bei konstantem Volumen.

Wegen $V \propto 1/\rho$ kann man Gleichung (3) schreiben als

$$p \cdot \rho^\kappa = \text{const}. \quad (4)$$

Differenzieren von Gleichung (4) führt zu folgendem Ergebnis:

$$\frac{dp}{d\rho} = \text{const} \cdot \kappa \cdot \rho^{\kappa-1} = \text{const} \cdot \rho^\kappa \cdot \kappa \cdot \frac{1}{\rho} = \kappa \cdot \frac{p}{\rho} \quad (5)$$

Unter der Voraussetzung eines idealen Gasmediums gilt für dieses die ideale Gasgleichung

$$pV = nRT \quad (6)$$

Dabei beschreiben n die Stoffmenge in Mol, R die universelle Gaskonstante und T die absolute Temperatur. Gleichung (6) wird durch die Gasmasse dividiert, wobei M die Molmasse angibt, sodass man

$$p \frac{V}{m} = \frac{R \cdot T}{M} \quad \text{mit} \quad m = n \cdot M \quad (7)$$

erhält und weiter schließlich

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R \cdot T}{M} \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{m}{V}. \quad (8)$$

Setzt man unter Verwendung von Gleichung (2) Gleichung (8) in Gleichung (5) ein, so ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit in Gasen

$$v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T}{M}}. \quad (9)$$

Gemäß der **kinetische Gastheorie** gilt für einatomige Gase $\kappa = 5/3$. Für zweiatomige Gase gilt $\kappa = 7/5$, für dreiatomige $\kappa = 4/3$.

Die Schallgeschwindigkeit hängt damit auch von der Struktur der Gasmoleküle ab. Ein zweiatomiges Gas hat (bei gleicher Temperatur) ein anderes v als ein fiktives einatomiges Gas mit gleicher Molmasse M . Gleichung (9) soll in diesem Experiment verifiziert werden.

1.3 Doppler-Effekt

Bewegen sich eine Quelle (Sender), von der eine Welle ausgeht, und ein Detektor (Beobachter) relativ zueinander, so nimmt dieser eine veränderte Frequenz wahr als die tatsächlich von der Quelle ausgehende. Nähern sich Quelle und Detektor einander an, kommt es zu einem früheren Aufeinandertreffen der Wellenfronten beim Detektor, und die Frequenz erscheint höher. Entfernen sich beide voneinander, so erniedrigt sich die wahrgenommene Frequenz. Dieses Phänomen wird als **Doppler-Effekt** bezeichnet, welches prinzipiell für alle Wellen Gültigkeit hat. Es wird hier anhand von Schallwellen (akustischer Doppler-Effekt) erläutert.

1.3.1 Ruhende Schallquelle und bewegter Detektor

Von einer stationären Schallquelle Q werden kugelförmige Wellenfronten der Wellenlänge λ mit der Geschwindigkeit v durch die Luft abgestrahlt. Gleichzeitig bewegt sich ein Detektor D auf die Quelle zu, vgl. Abbildung (2). Die Frequenz, die der Detektor wahrnimmt, entspricht der Rate, mit der D auf die Wellenfronten (einzelnen Wellenlängen) trifft. Die Strecke der sich u. a. nach rechts ausbreitenden Wellenfronten ergibt sich zu $v \cdot t$, D bewegt sich in demselben Zeitintervall um $v_D \cdot t$ nach links.

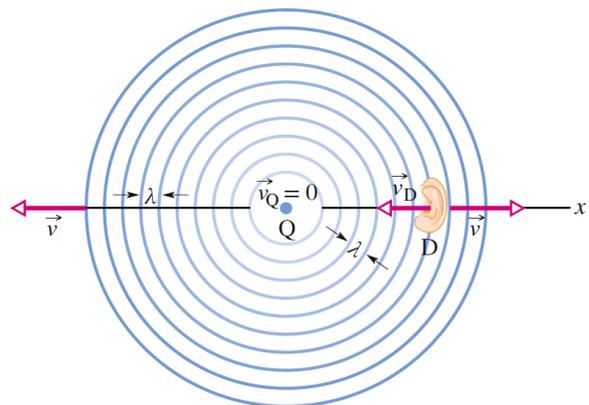


Abbildung 2: Kugelförmige Ausbreitung von Wellenfronten der Wellenlänge λ mit der Geschwindigkeit \vec{v} von einer stationären Schallquelle Q . Gleichzeitig bewegt sich der Detektor D mit der Geschwindigkeit \vec{v}_D auf die Quelle zu (aus **Halliday/Resnick**).

Somit haben sich im Zeitraum t die Wellenfronten relativ zu D um die Strecke $v \cdot t + v_D \cdot t$ weiterbewegt. Es ergibt sich aus der Rate, mit der D auf die Wellenfronten trifft, und Gleichung (2) die Frequenz

$$f' = \frac{(v \cdot t + v_D \cdot t) / \lambda}{t} = f \frac{v + v_D}{v}. \quad (10)$$

Allgemein erhält man

$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v}. \quad (11)$$

Dabei steht das Pluszeichen für die Bewegung des Detektors auf die Schallquelle zu, das Minuszeichen für die Bewegung des Detektors von der Quelle weg.

1.3.2 Bewegte Schallquelle und ruhender Detektor

In diesem Fall ruht der Detektor D relativ zur Luft, wobei sich die Quelle Q auf diesen zubewegt. Dies ist in Abbildung (3) dargestellt. Die Wellenlänge λ der von der Quelle Q abgestrahlten Schallwelle wird durch die Bewegung der Quelle verändert, was ebenso für die wahrgenommene Frequenz gilt. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden abgestrahlten Wellenfronten W_1 und W_2 wird mit $T = 1/f$ bezeichnet. Die Wellenfront W_1 bewegt sich in der Zeit T um die Strecke $v \cdot T$, während die Quelle die Strecke von $v_Q \cdot T$ zurücklegt. Ist die Zeit T vergangen, wird die Wellenfront W_2 ausgesandt. Dies führt zu einer reduzierten Wellenlänge λ' , die sich aus der Differenz $v \cdot T - v_Q \cdot T$ ergibt. Es folgt mittels Gleichung (2) für die wahrgenommene Frequenz

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v \cdot T - v_Q \cdot T} = \frac{v}{v/f - v_Q/f} = f \frac{v}{v - v_Q}. \quad (12)$$

Allgemein ergibt sich

$$f' = f \frac{v}{v \pm v_Q}. \quad (13)$$

Nun steht das Pluszeichen für die Bewegung der Schallquelle vom Detektor weg, das Minuszeichen für die Bewegung der Quelle auf den Detektor zu.

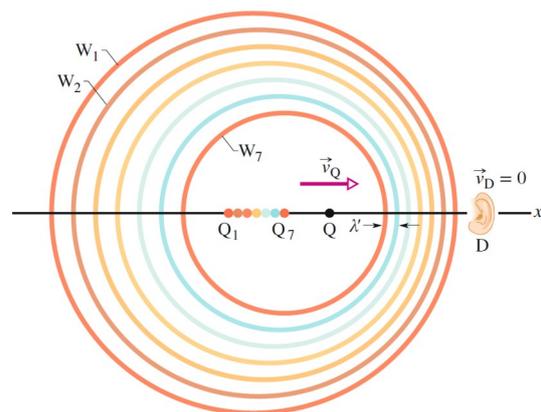


Abbildung 3: Ruhender Detektor D bei sich gleichzeitig auf den Detektor mit der Geschwindigkeit \vec{v}_Q zubewegender Schallquelle Q. Die Wellenfront W_i wurde abgestrahlt, als sich die Quelle am Ort Q_i ($i = 1, \dots, 7$) befand. Die Quelle strahlt in Richtung ihrer Bewegung eine reduzierte Wellenlänge λ' ab (aus *Halliday/Resnick*).

2 Aufgaben und Hinweise

2.1 Messungen mit dem Kundtschen Rohr

ACHTUNG: Bitte vor jedem Einschalten des Frequenzgenerators die **Lautstärke (Amplitude)** mit dem entsprechenden Regler auf das **Minimum** einstellen!

2.1.1 Schallgeschwindigkeit in Luft ohne Styropor

Das Rohr wird vor den Lautsprecher gelegt und der Stempel auf der anderen Seite einige cm weit eingeführt. Am Frequenzgenerator stellen Sie jetzt etwa 4 kHz ein und regeln die Amplitude zu höheren Werten, bis Sie den Ton leise (!) hören.

Halten Sie nun den Kopf so ruhig wie möglich (wichtig!) und verschieben den Stempel langsam Richtung Lautsprecher. Sie werden hören, dass der Ton lauter und leiser wird. Die empfundene unterschiedliche Lautstärke ist auf die Erscheinung der **Resonanz** zurückzuführen. Durch Reflexion am Stempel entstehen immer, also bei jeder Stellung des Stempels, **stehende Wellen**. Dies gelingt allerdings nur dann, wenn der Abstand zum Lautsprecher so ist, dass an der Lautsprechermembran ein Schwingungsbauch und am Stempel ein Schwingungsknoten vorliegt. Nur in diesem Fall schwingt die im Rohr eingeschlossene Gassäule entsprechend. Es wird laut; die Schwingung der Gassäule ist dann, wie man sagt, „mit den Randbedingungen verträglich“. Somit stellt das Rohr einen **akustischen Resonator** dar, der sich bei Kompatibilität der schwingenden Gassäule mit den Randbedingungen „in Resonanz“ befindet.

- 1) Führen Sie in der Auswertung aus, dass Resonanz genau dann vorliegt, wenn von der stehenden Welle genau $n \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ (n ganzzahlig) zwischen Stempel und Lautsprecher liegen.
- 2) Messen Sie für Luft den Abstand d zwischen möglichst vielen „Laut“-Stellungen des Stempels. Um sicher zu gehen, dass Sie sich nicht verzählt haben, wiederholen Sie die Messung, bis Sie reproduzierbare Werte erhalten. Notieren Sie d sowie die Zahl der Knoten und zudem die Genauigkeit, mit der Sie d messen konnten. Bestimmen Sie daraus auf kommentierte nachvollziehbare Weise die Wellenlänge und schließlich die Schallgeschwindigkeit $v_{L,1}$ mit der Genauigkeit $\Delta v_{L,1}$. Den Fehler der Frequenzanzeige des Generators vernachlässigen Sie dabei.

2.1.2 Schallgeschwindigkeit in Luft mit Styropor

In das Rohr wird mit dem bereitliegenden Plastikhalbrohr eine geringe Menge Styropor eingebracht, sodass der Boden des Rohres von einem gleichmäßigen dünnen Streifen bedeckt ist. Dazu ist ein wenig Übung nötig. Es wird ein Halbrohr aus Kunststoff mit dem Styropor gefüllt, in

das Glasrohr vorsichtig hinein geschoben und umgedreht. Ein zu dicker Streifen verhindert die Sichtbarmachung von Knoten und Bäuchen ebenso wie ein zu dünner.

Ist der Styropor-Streifen gelungen, legen Sie das Rohr vor den Lautsprecher. Stellen Sie nun, wie oben (also bei geringer (!) Amplitude) mit dem Stempel eine laute Position, also Resonanz, ein. Anschließend verwenden Sie den Ohrenschutz und erhöhen für zwei bis drei Sekunden die Amplitude des Generators, bis sich entsprechende Wellenfiguren bilden. Dazu drehen Sie den Regler für einen kurzen Moment bis zum Anschlag und stellen dann die Amplitude auf null.

Die Kügelchen haben sich hoffentlich in den Bewegungsknoten versammelt und sind aus den Bauchbereichen verschwunden. Sie können nun den Abstand möglichst vieler (!) Knoten- oder Bäuche messen und daraus die Wellenlänge bestimmen. „Möglichst viele“ deshalb, weil der Fehler dadurch kleiner wird.

Falls die Styropor-Kügelchen sich trotz Graphit-Beschichtung elektrostatisch so aufgeladen haben, dass sie sich nicht mehr unabhängig bewegen und am Rohr hängen bleiben, rufen Sie bitte den Versuchsbetreuer.

Messen Sie auf diese Weise die Schallwellenlänge in Luft für mindestens 3 verschiedene Frequenzen. Als Obergrenze können Sie 5 kHz verwenden, die Untergrenze soll möglichst tief liegen und von Ihnen selbst ermittelt werden. Sie hängt von vielen Parametern ab, vor allem davon, wie gut der Styropor-Streifen gelungen ist.

Berechnen Sie aus Frequenz und Wellenlänge die Schallgeschwindigkeit $v_{L,2}$ jeweils mit der Messgenauigkeit $\Delta v_{L,2}$ und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar. Tragen Sie dazu die Werte für $v_{L,2}$ mit Fehlerbalken $\pm \Delta v_{L,2}$ gegen die Frequenz auf.

Diskutieren Sie kurz den gefundenen Verlauf der Schallgeschwindigkeit mit steigender Frequenz, d. h. können Sie einen systematischen Zusammenhang erkennen. Ist $v_{L,2}$ innerhalb der Messgenauigkeit unabhängig von der Frequenz (Dispersion) vorhanden oder nicht?

Geben Sie einen Endwert für $v_{L,2}$ samt Genauigkeit an, indem Sie in der Grafik den entsprechenden Vertrauensbereich abschätzen.¹

2.1.3 Vergleich der experimentell ermittelten Schallgeschwindigkeiten in Luft

Vergleichen Sie in Tabellenform die Endwerte aus Abschnitt 2.1.1 und 2.1.2. Stimmen beide Werte innerhalb ihrer Fehlergrenzen überein? Hat es sich (im physikalischen Sinn) gelohnt, so aufwändig

¹ Eine bessere Ermittlung des Endwertes und seines Fehler besteht darin, eine lineare Regression durchzuführen (s. Anleitung zur Fehlerrechnung). Der Achsenabschnitt gibt dann die gesuchten Größen.

mit Styroporkügelchen zu messen? Vergleichen Sie abschließend Ihre bisherigen Messergebnisse mit einem geeigneten Literaturwert für eine Temperatur von 20 °C.

ACHTUNG: Weder CO₂ noch Helium einatmen. Den Gasfluss keinesfalls mit Zunge oder Auge prüfen.

Verätzungsgefahr!

Beachten Sie die Bedienungsanleitung für Druckgase.

2.1.4 Schallgeschwindigkeit in CO₂

Erzeugen Sie zunächst wieder mit einer geringen Menge Styropor einen gleichmäßigen dünnen Streifen am Boden des Rohres. Schieben Sie den Lautsprecher zunächst nur soweit an das Rohr heran, dass ein deutlicher Spalt zum Rohr besteht. Verbinden Sie den Stempel mit dem CO₂-Schlauch und führen Sie ihn auf der anderen Seite einige cm in das Rohr ein. Stellen Sie an der Wandarmatur langsam einen Druck von ca. 1 bar ein und öffnen Sie gleichzeitig den Durchflussregler, sodass am Kolben ein Gasfluss von ca. 1,20 l/min entsteht. Spülen Sie das Rohr nun für etwa 10 min, um im Inneren eine möglichst reine CO₂-Atmosphäre zu erzeugen. Es wird immer wieder erforderlich sein, an beiden Reglern (vorsichtig!) nachzuregulieren. Schieben Sie nach Ende der Spülzeit den Lautsprecher wieder an das Rohr heran.

Führen Sie nun analog zu 2.1.2 3 Messungen mit dem zweiatomigen Gas CO₂ durch. Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit mit Genauigkeitsangabe, stellen Sie die Messergebnisse grafisch dar und vergleichen Sie mit einem geeigneten Literaturwert.

2.1.5 Schallgeschwindigkeit in Helium

Präparieren Sie einen etwas dickeren Styropor-Streifen auf dem Boden des Rohres. Schließen Sie den entsprechenden Gasschlauch an den Stempel des Rohres an und spülen Sie das Rohr mit einem Gasfluss von ca. 1,25 l/min (Wandregler 1 bar) für ca. 15 min. Auch hier ist während der Spülzeit an beiden Reglern (vorsichtiges!) Anpassen der Gaszufuhr erforderlich.

Ermitteln Sie nun die Schallgeschwindigkeit für das einatomige Gas Helium. Wählen Sie eine niedrige Frequenz von 1 kHz. Dazu stellen Sie zunächst, wie oben (also bei geringer (!) Amplitude) mit dem Stempel eine laute Position ein. Legen Sie dann den Ohrenschutz an und erhöhen die Amplitude bis zum maximalen Wert. Regeln Sie dann den Stempel geringfügig nach, sodass sich einigermaßen saubere Bäuche und Knoten einer stehenden Welle bilden. Stellen Sie anschließend die Amplitude wieder auf null. Führen Sie 2 weitere Messungen im niedrigen Frequenzbereich durch.

Gehen Sie bei der Darstellung der Messergebnisse sowie bei der Auswertung exakt wie in 2.1.2 vor.

2.1.6 Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten

Lösen Sie die Gleichung (9) nach κ auf und berechnen Sie die Werte von κ_{exp} für Luft, Helium und CO_2 . Begründen Sie hierbei Ihre Wahl für die Masse M . Ermitteln Sie die Temperatur T mit dem vorhandenen Messgerät.

Wenn Gleichung (9) richtig ist, so müssen die auf diese Weise ermittelten Werte mit denjenigen κ_{theo} übereinstimmen, die sich aus der kinetischen Gastheorie ergeben.

Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle dar. Schreiben Sie unterhalb der Tabelle Ihren Rechenweg für eine Gasart nieder, damit ihn der Leser nachvollziehen kann.

Stimmen die Werte innerhalb der Fehlergrenzen überein, sodass Gleichung (9) bestätigt werden kann?

2.2 Messungen zum Doppler-Effekt

2.2.1 Ruhende Schallquelle und bewegter Detektor

Fixieren Sie die Schallquelle auf der linken Seite der Fahrschiene sowie auf dem Messwagen den Detektor in der kurzen Halterung und darauf die schwarze Messscheibe, siehe Abbildung (4).

Platzieren Sie die Lichtschranke etwa in der Mitte der Schiene. Die Schallquelle muss sich in gleicher Höhe des Detektors befinden. Richten Sie die Messscheibe so aus, dass sie die Lichtschranke passieren kann, ohne die Fahrt des Messwagens zu beeinträchtigen.

Zuerst muss die Geschwindigkeit des Messwagens ermittelt werden. Wählen Sie zunächst die Einstellungen des Universalzählers wie folgt: Funktion \rightarrow Geschwindigkeit, Trigger \square , Abstand \rightarrow 50 mm.

Wählen Sie den Startpunkt des Wagens genau so aus, dass sich dieser zunächst von der Schallquelle wegbewegen kann und seine

Geschwindigkeit beim Passieren der Lichtschranke konstant ist, d. h. er nicht beschleunigt wird. Stellen Sie den Geschwindigkeitsregler des Fahrzeugs auf eine Zwischenposition ein und starten den Wagen, sodass eine Geschwindigkeit zwischen 0,15 m/s bis 0,20 m/s erreicht wird. Führen Sie bei dieser Geschwindigkeit mindestens fünf Einzelmessungen durch und bestimmen daraus die durchschnittliche Geschwindigkeit des Messwagens.

Stellen Sie danach an der Schallquelle eine Frequenz f ein, siehe Abbildung (5).



Abbildung 4: Messwagen mit Detektor und Messscheibe.

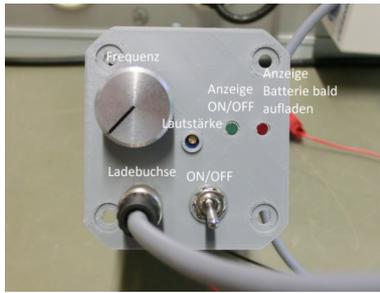


Abbildung 5: Bedienungselemente und Anzeigen der Schallquelle.

Ändern Sie die Einstellungen des Universalzählers in Funktion → Frequenz sowie Modus → Analog. Nun ermitteln Sie den Wert der vom Detektor wahrgenommenen Frequenz f' . Dazu drücken Sie die „Start“-Taste und notieren sich die am Universalzähler angezeigte Frequenz bei ruhendem Wagen. Dann starten Sie den Messwagen am bei der Geschwindigkeitsmessung festgelegten Punkt. Beim Durchqueren der Lichtschranke drücken Sie die „Hold“-Taste und bekommen den Momentanwert der Frequenz f'

angezeigt. Führen Sie für mindestens 5 verschiedene Frequenzen f zwischen 5 kHz und 10 kHz Messungen durch. Wiederholen Sie den Vorgang (auch die vorherige Geschwindigkeitsmessung!) für den Fall, dass sich die Schallquelle auf den Detektor zubewegt.

Verifizieren Sie die Gültigkeit von Gleichung (11) für beide Fälle. Tragen Sie dazu die verschobene Frequenz f' als Funktion der ausgesendeten Frequenz f auf und ermitteln aus der Steigung die Schallgeschwindigkeit v .

2.2.2 Bewegte Schallquelle und ruhender Detektor

Fixieren Sie nun den Detektor in der langen Halterung mithilfe des Stativfußes auf der linken Seite der Fahrbahn. Auf dem Messwagen wird die Schallquelle montiert und darauf die schwarze Messscheibe, siehe Abbildung (6). Platzieren Sie die Lichtschranke wieder in der Mitte der Schiene.

Achten Sie auf gleiche Höhe von Schallquelle und Detektor sowie auf die richtige Stellung der Messscheibe.

Bestimmen Sie zunächst die Geschwindigkeit des Messwagens wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben. Wählen Sie anschließend die Frequenz und ändern die Einstellungen des Universalzählers entsprechend, um die am Detektor wahrgenommene Frequenz zu messen. Führen Sie das Messverfahren sowie die anschließende Auswertung analog zu Abschnitt 2.2.1 durch.

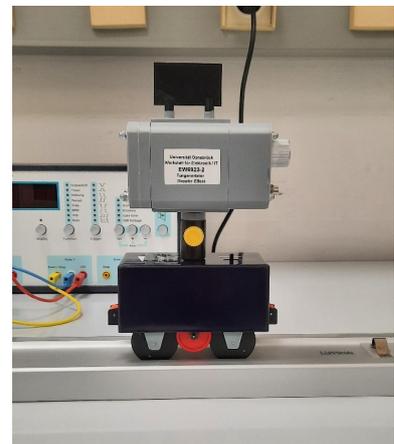


Abbildung 6: Messwagen mit Schallquelle und Messscheibe.

Hinweise:

- 1) Wenn der Universalzähler trotz deutlich hörbarem Ton die Frequenz nicht misst, kann es erforderlich sein, die Ausgangsspannung des Mikrofonverstärkers anzupassen.
- 2) Während der Messung dürfen keine Nebengeräusche auftreten, da diese auch vom Detektor

aufgenommen werden.

- 3) Wenn sich die Fahrzeuggeschwindigkeit zunehmend verlangsamt, obwohl der Geschwindigkeitsregler nicht verstellt wurde, sollte ggf. die Batterie erneuert werden.
- 4) Die Tatsache, dass die Vorwärts- und Rückwärtsgeschwindigkeit desselben Messwagens nicht identisch sind, ist normal und hängt vom im Auto verwendeten Motortyp ab.