

Messung von Wechselstromeigenschaften, Schwingkreis

Ziele

- Frequenzverhalten bei kapazitivem und induktiven Impedanzen
- Bestimmung von Eigenfrequenz, Resonanzfrequenz und Dämpfung eines elektrischen Schwingkreises
- Kennenlernen des Oszilloskops

1 Grundlagen

Die Prinzipschaltung zu diesem Versuch wird in Abbildung (1) gezeigt.

Als **Netzwerke** werden einige einfache Grundschaltungen aus Ohmschem Widerstand, Spule und Kondensator studiert. Die Generatorspannung $U(t)$ und der Gesamtstrom $I_{\text{ges}}(t)$ werden mit einem Oszilloskop gemessen.

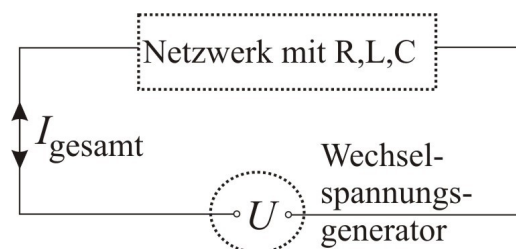


Abbildung 1: Darstellung des Prinzips der verwendeten Schaltungen.

Es genügt, als Wechselspannung $U(t)$ eine Spannung mit sinus- oder cosinusförmiger Zeitabhängigkeit, $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$, zu betrachten. Wenn man die Gesetzmäßigkeiten für diesen Fall kennt, können nämlich andere zeitliche Verläufe mit Hilfe der Fourierentwicklung behandelt werden. Wird die genannte Spannung an einen rein ohmschen Widerstand R gelegt, so gilt für den Strom¹ $I(t) = U(t)/R = U_0/R \cdot \cos(\omega t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$.

Für die Amplituden liegt also das vom Gleichstromkreis bekannte Ohmsche Gesetz vor, nämlich $U_0 = R \cdot I_0$ und Strom und Spannung haben die gleiche Phase.

Die Messung des Spannungsabfalls an einem Ohmschen Widerstand ist also zur Strommessung äquivalent.

Bekanntlich ändert sich die Beziehung zwischen Amplituden und Phasen von Strom und Spannung signifikant, wenn Spulen mit der **Induktivität** L und Kondensatoren mit der **Kapazität** C im Stromkreis vorhanden sind.

¹ Es wird nun der Index „ges“ zur Vereinfachung weggelassen.

Es wird in diesem Versuch immer die Generatorspannung als Ursache des Geschehens betrachtet und der Stromfluss ist eine Folge davon, schematisch

$$\begin{array}{ccc} U(t) & \rightarrow & I(t) \\ \text{Ursache} & & \text{Wirkung} \end{array} .$$

Daher wird später $U(t)$ auch als Eingangsspannung U_{in} bezeichnet. Da außerdem der Folgestrom $I(t)$ nicht direkt gemessen werden soll, sondern eine dazu proportionale Spannung, $R \cdot I(t)$, wird diese Spannung auch Ausgangsspannung $U_{\text{out}} = R \cdot I(t)$ genannt.

Das Netzwerk aus Widerstand, Spule und Kondensator kann dann als Schaltkreis angesehen werden, der U_{in} nach $I(t)$ und damit nach U_{out} transformiert oder „filtert“. Diese Transformation kann analog zum Ohmschen Gesetz formal geschrieben werden als

$$U(t) = Z \cdot I(t), \quad (1)$$

wobei Z , die **Impedanz**, eine mehr oder weniger komplizierte Funktion der beteiligten R , L und C ist, mehr dazu weiter unten.

Man kann sich aber auch alternativ den Strom vorgegeben denken und nach der resultierenden Spannung fragen – die Zusammenhänge sind die gleichen. Dies wird in der Literatur mindestens ebenso häufig getan.

Ziel des Versuches ist es, besagte Zusammenhänge zwischen Wechselstrom und Wechselspannung experimentell zu untersuchen und mit den Aussagen der Wechselstromlehre zu vergleichen.

Als Messinstrument steht ein Oszilloskop zur Verfügung, welches die zeitlichen Verläufe von Spannung und Strom simultan darstellen kann. Die Bedienung dieses Gerätes stellt auch für erfahrene Physiker immer wieder eine Herausforderung dar, weshalb in diesem Versuch insbesondere zur Aufgabe steht, sich möglichst gut mit dem Oszilloskop vertraut zu machen.

1.1 Physikalische Grunderscheinungen

Phasenverschiebung: Besteht das Netzwerk in Abbildung (1) allein aus einem idealen Kondensator, so fließt der stärkste Wechselstrom zum Zeitpunkt des Umladens, wenn also gerade die anliegende Spannung gleich Null ist. Ist er voll geladen, so hat die Spannung ihren Maximalwert erreicht, aber der Strom ist zu Null geworden. Man kann also sagen, dass die Spannung dem Strom hinterherläuft, und zwar um eine Viertelperiode. Formal:

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \rightarrow I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \text{ mit } \varphi = \pi/2 .$$

Bei einer idealen Spule als Netzwerk fließt dagegen der stärkste Strom zum Zeitpunkt des Verschwindens der selbst induzierten Gegenspannung. Diese wird maximal, wenn der Strom sich am

stärksten ändert, was bekanntlich bei dessen Nulldurchgang der Fall ist. Man kann also sagen, dass die Spannung dem Strom vorseilt, und zwar wiederum um eine Viertelperiode.

Diese Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung wird ungleich $\pm\pi/2$, wenn sich zusätzlich ein ohmscher Widerstand im Kreis befindet, oder wenn alle drei Schaltelemente gleichzeitig vorhanden sind.

Ähnlich einfach kann man qualitativ bezüglich der **Amplitudenbeziehungen** argumentieren. Bei gegebener Spannungsamplitude U_0 muss ja plausiblerweise I_0 durch die Größe der Kapazität C und der Induktivität L bestimmt sein.

Die quantitative Beschreibung der Gleichung (1), also von $U(t) = Z \cdot I(t)$ zwischen einer Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ und dem resultierenden Wechselstrom $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ muss also genau die Phasenverschiebung φ und das Amplitudenverhältnis U_0/I_0 liefern. Die Zusammenhänge können als Wechselstromgesetze bezeichnet werden. Dies ist das Versuchsthema.

Die einfachste quantitative Beschreibung² geschieht mittels komplexer Zahlen. Sowohl U als auch I und die Impedanzen Z werden als komplexe Zahlen behandelt. Die Ausdrücke für Z können zwar recht kompliziert werden, jedoch gibt es heutzutage Computeralgebraprogramme (Freeware: „wxMaxima“), mit denen man Rechenfehler vermeiden kann. In der Praxis verzichtet man ohnehin auf analytische Lösungen und benutzt ein geeignetes Numerikprogramm, wie „SCILAB“, „MATLAB“ oder „Python“. Die Lösung wird dann trivial, wie später für das Beispiel des RLC-Schwingkreises gezeigt werden wird. Noch bequemer geht es mit speziellen Simulationsprogrammen.

1.2 Komplexe Impedanzen

Komplexe Wechselstromberechnungen beruhen auf der Idee, die vorgegebene Wechselspannung als komplexe Funktionen der Zeit zu schreiben, also $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t} = U_0 \cdot [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]$. Der resultierende Strom ist dann $I(t) = I_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = I_0 \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)]$.

Die Bauelemente werden zu geeigneten „komplexen Widerständen“, den **Impedanzen** Z . Man benutzt auch häufig mit Vorteil die **Leitwerte** $Y = 1/Z$. Es gelten schlicht „modifizierte Ohmsche Gesetze“:

$$U = Z \cdot I \quad \text{bzw.} \quad I = Y \cdot U. \quad (2)$$

Die Impedanzen Z des Netzwerkes werden nach den **Kirchhoffschen Regeln** aus den Impedanzen der einzelnen Bauelemente berechnet, näheres folgt. Die Grundgleichung (2) macht die Einfachheit

² Es wird dringend empfohlen, den scheinbar einfacheren Weg ohne komplexe Zahlen über so genannte „Zeigerdiagramme“ in Verbindung mit „Regeln“ sich nicht anzueignen.

der Formulierung mit komplexen Zahlen deutlich.

Physikalisch messbar bleibt jeweils nur der Realteil oder der Imaginärteil von I und U . Im Folgenden sollen die Realteile festgelegt und mit $\Re I$ und $\Re U$ bezeichnet werden.

Impedanz und Leitwert der elementaren Bauteile sind der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	Ohmscher Widerstand	Spule	Kondensator
Z	R	$i \omega L$	$-\frac{i}{\omega C}$
Y	$\frac{1}{R}$	$-\frac{i}{\omega L}$	$i \omega C$

Tabelle 1: Impedanzen und Leitwerte der elementaren Bauelemente.

Wie erwähnt können die Z für Parallel- oder Serienschaltungen mit den Kirchhoffschen Gesetzen berechnet werden. Dies soll an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden, die auch im Experiment Gegenstand der Untersuchung sind.

1.3 Spule im Wechselstromkreis

Betrachtet wird zunächst ein Stromkreis mit einer idealen Spule der Induktivität L und einem ohmschen Widerstand R , wie in Abbildung (2) dargestellt. Das Netzwerk aus Abbildung (1) besteht also aus R und L in Serie geschaltet.

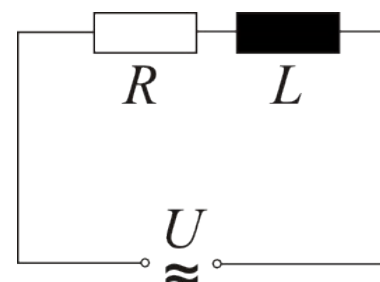


Abbildung 2: Serienschaltung aus Widerstand und Induktivität.

Wie bereits erwähnt: Die Spannung des Netzgerätes $U = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ ist vorgegeben und der Strom soll berechnet werden.

Bei der Serienschaltung addieren sich die Impedanzen, also ist $Z_{\text{gesamt}} = R + i \omega L$.

Wegen $I = Y \cdot U$ wird der Leitwert $Y = 1/Z$ benötigt. Die Bildung des Kehrwertes von komplexen Zahlen geschieht auf einfache Weise mit der Exponentialdarstellung, $Z = z \cdot e^{i\varphi}$, mit $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ und $\varphi = \arctan(\omega L/R)$. Der Kehrwert ist nun einfach $Y = 1/(z \cdot e^{-i\varphi})$.

Der gesuchte Strom $I = Y \cdot U$ schreibt sich also als $I(t) = U_0 / (z \cdot e^{i(\omega t - \varphi)})$ mit dem im Experiment messbaren Realteil

$$\Re I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \arctan \frac{\omega L}{R}\right). \quad (3)$$

Wie erwartet liegt der Strom hinter der Spannung. Die Phasenverschiebung $\varphi = -\arctan \omega L/R$ wird $-\pi/2$ für $R \ll \omega L$ (ideale Spule ohne R , siehe 1.1) und null im umgekehrten Fall.

Im Experiment kann die Phasenbeziehung leicht überprüft werden. $\Re U$ des Wechselspannungsgenerators kann auf einen Kanal des Oszilloskops gegeben werden (siehe Abschnitt Fehler: Verweis nicht gefunden). Den Strom stellt man auf dem anderen Kanal dar, indem man diesen mit dem Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand $U_R = R \cdot \Re I$ füttert. Strom und Spannung am Ohmschen Widerstand sind ja bekanntlich in Phase, und es gilt einfach $I_0 = U_{R0}/R$, wie ganz zu Beginn festgestellt wurde.

Sind die Werte für ω , R und L bekannt, so kann auch die Beziehung der Amplituden,

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U_{R0}}{R}, \quad (4)$$

nachgemessen werden (U_0 ist die Amplitude der Generatorspannung, U_{R0} die Amplitude der Spannung am Widerstand R).

Abbildung (3) zeigt das einfache Szenario auf dem Oszilloskop, Phase und Amplituden können direkt abgelesen werden.

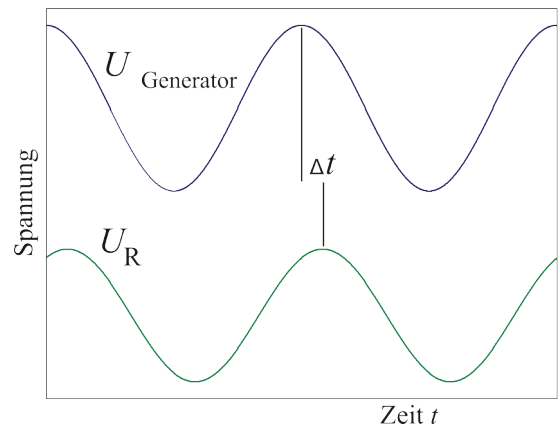


Abbildung 3: Zeitlicher Verlauf der Spannungen $\Re U(t)$ und $U_R(t) = R \cdot \Re I(t)$. Die Phasenverschiebung φ kann aus Δt und der Periode T berechnet werden (Dreisatz).

Wenn man die Spannung an der Spule $\Re U_L$ gegen den Strom misst, muss natürlich die bekannte Phasenverschiebung von $\pi/2$ resultieren, unabhängig von der Größe von R ; man braucht das gar nicht erst auszurechnen. Experimentell könnten kleinere Abweichungen von $\pi/2$ zu sehen sein, da im Experiment natürlich keine ideale Spule vorliegt (d. h. ohne einen Serienwiderstand).

Am Ende sei noch erwähnt, dass die Lehrbücher häufig den Ausdruck $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, d. h. den Betrag der komplexen Impedanz, als **Scheinwiderstand** oder auch einfach als Impedanz bezeichnen. Sie werden den unterschiedlichen Gebrauch der Begriffe sicherlich erkennen können.

1.4 Kondensator im Wechselstromkreis

Ersetzt man in Abbildung (2) die Spule durch einen (idealen) Kondensator, so erhält man eine Schaltung wie in Abbildung (4) dargestellt.

Diesmal ist der Kondensator senkrecht eingezeichnet und die Spannungen werden mit „Ausgangsspannung U_{out} “ (gleich Generatorspannung) und „Eingangsspannung U_{in} “ bezeichnet. Diese Schaltung wird technisch häufig verwendet, ein sogenannter Hoch-

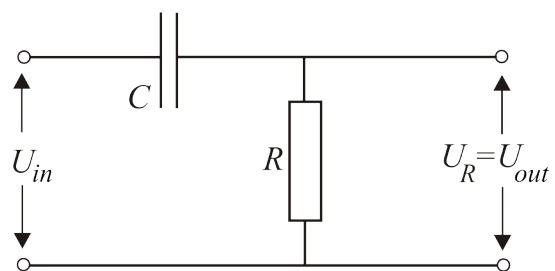


Abbildung 4: RC-Glied als Hochpass.

pass, was unten weiter erläutert wird.

Hier gelten $Z_{\text{gesamt}} = R - i/(\omega C)$, unverändert $Y = 1/(z \cdot e^{-i\varphi})$ aber mit $z = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$ und $\varphi = \arctan[-1/(R\omega C)] = -\arctan 1/(R\omega C)$.

Der gesuchte Strom schreibt sich wieder als $I(t) = \frac{U_0}{z} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$ mit dem im Experiment messbaren Realteil

$$\Re I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} \cdot \cos\left(\omega t + \arctan \frac{1}{R\omega C}\right). \quad (5)$$

Wie erwartet (siehe Abschnitt 1.1) liegt der Strom vor der Spannung und die Phasenverschiebung wird $\pi/2$ für $R \ll 1/(\omega C)$ und Null im umgekehrten Fall. Man erkennt an Gleichung (5), dass die Amplitude von $U_{\text{out}} = R \cdot \Re I$ für kleine ω gegen null und für große ω gegen U_0 geht. Daher der Name Hochpass.

Als charakteristische Kurve des Hochpasses trägt man üblicherweise das Verhältnis $U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$ gegen ω halblogarithmisch auf.

1.5 Parallelschwingkreis

Ein elektrischer Schwingkreis kann auf mehrere Arten realisiert werden. Hier wird lediglich der sogenannte **Parallelschwingkreis** betrachtet, der in Abbildung (5) dargestellt ist.

„Parallel“ heißt er deshalb, weil die Energie speichernden Bauelemente Spule und Kondensator parallel geschaltet sind. Der zu einem realen Kondensator gehörende Parallelwiderstand R_C kann getrost vernachlässigt werden, der innere Spulenwiderstand R_L wird hingegen berücksichtigt. Es wird der Einfluss von R_L auf das Ergebnis untersucht und im Experiment wieder-

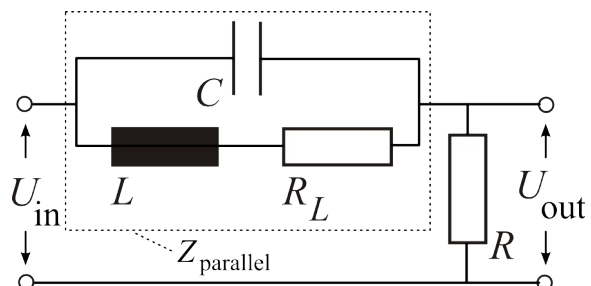


Abbildung 5: Parallelschwingkreis mit ohmschem Spulenwiderstand R_L . Der Spannungsabfall an R wird als Ausgangsspannung bezeichnet, sodass der Schwingkreis als Sperrkreis zu sehen ist (siehe Text).

zuerkennen sein. Wiederum soll der Strom bei vorgegebener Generatorspannung U_{in} berechnet

werden, weshalb wieder der Leitwert der Gesamtschaltung berechnet wird: $Y_{\text{ges}} = \frac{1}{R + Z_{\text{parallel}}}$

Z_{parallel} ist aber wegen der Parallelschaltung am einfachsten aus $Y_{\text{parallel}} = Y_C + Y_L \text{ und } R_L$ zu errechnen, denn laut Kirchhoff addieren sich die Leitwerte bei Parallelschaltung. Insgesamt lautet der Ansatz also

$$Y_{\text{ges}} = \frac{1}{R + \frac{1}{Y_{\text{parallel}}}} \quad \text{mit} \quad Y_{\text{parallel}} = i\omega C + \frac{1}{R_L + i\omega L}. \quad (6)$$

Setzt man die rechte Seite von Gleichung (6) in die linke ein, so erhält man nach etwas Rechnen

$$Y_{\text{ges}} = \frac{1}{R + \frac{R_L + i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega R_L C}} = \frac{1 - \omega^2 LC + i\omega R_L C}{R_L + R(1 - \omega^2 LC) + i\omega(L + R_L RC)}. \quad (7)$$

Mit dem Leitwert nach Gleichung (7) kann wieder das zu messende Verhältnis T von Ausgangs- zu Eingangsspannung berechnet werden, denn es gilt

$$T := \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = \frac{I \cdot R}{U_{\text{in}}} = Y_{\text{ges}} \cdot R. \quad (8)$$

Das komplexe Verhältnis T gibt die Amplitude und Phasenlage der Ausgangsspannung U_{out} relativ zu U_{in} wieder. Diese Größen können im Experiment mit dem Oszilloskop gemessen werden.

Es lässt sich durch numerische Berechnung bei diesem schon etwas komplizierteren Fall folgende grafische Darstellung (Abbildung 6) erhalten:

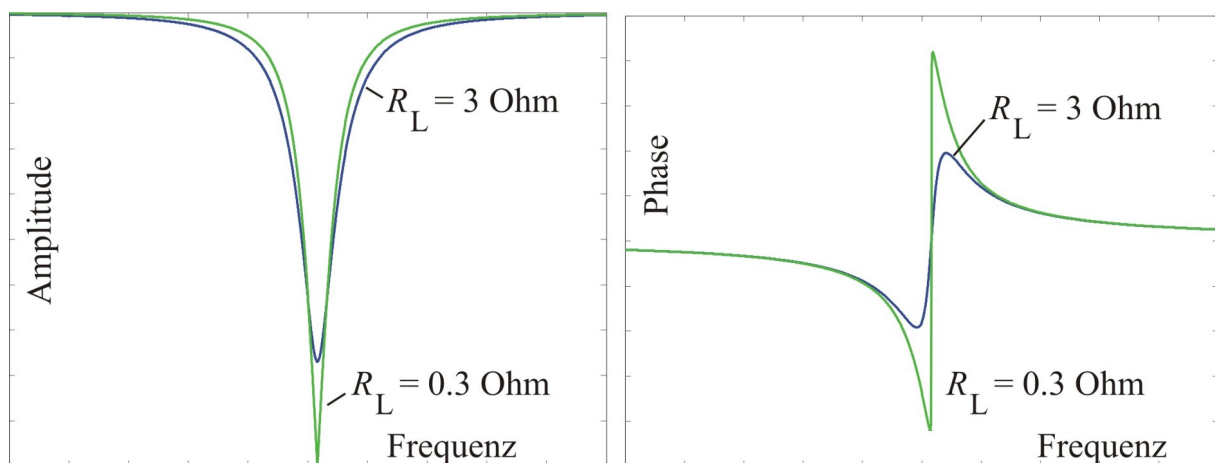


Abbildung 6: Amplitude und Phase des Spannungsabfalls am Vorwiderstand relativ zur Generatorspannung, also $T = U_R / U_{\text{Generator}} = Y_{\text{ges}} \cdot R$ beim Parallelschwingkreises mit endlichem Spulenwiderstand R_L .

Man sieht wie die Amplitude von T , also auch von U_{out} bei einer bestimmten Frequenz einbricht, der sogenannten **Resonanzfrequenz** ω_{res} . Daher der Name **Sperrkreis**. An gleicher Stelle liegt ein **Phasensprung** vor. Im Anhang wird gezeigt, dass man näherungsweise $\omega_{\text{res}} = 1/\sqrt{LC}$ berechnen kann.

$\omega_{\text{res}} = 1/\sqrt{LC}$ ist der bekannte Ausdruck für die Resonanzfrequenz eines elektrischen Schwingkreises, den man üblicherweise ganz anders behandelt, nämlich indem man die zwischen Kondensator und Spule pendelnde Energie betrachtet. Man stellt Differentialgleichungen für die Ladung Q

und den Strom $I = \dot{Q}$ auf. Das hier betrachtete System führt eine erzwungene Schwingung aus, der Antrieb geschieht durch den Generator, R stellt die Kopplung zwischen Antrieb und Schwingkreis dar. Der Widerstand R_L der Spule erzeugt die Dämpfung.

Wichtig ist hier vor allem zu sehen, dass die Resonanz mit steigendem R_L flacher und breiter wird (Erhöhung der Dämpfung). Außerdem sperrt der Sperrkreis mit wachsendem R_L nicht mehr völlig bei ω_{res} .

1.6 Aufbau und Funktion eines modernen Oszilloskops

Seit einigen Jahren hat das klassische Kathodenstrahloszilloskop in den meisten Labors ausgedient. Stattdessen werden mikroprozessorgesteuerte Geräte eingesetzt, welche die Eingangsspannung U in konstanten zeitlichen Abständen digitalisieren („sampling“) und speichern. „Gleichzeitig“ wird der gespeicherte Datenzug $U(t)$ auf einem LCD-Schirm dargestellt, auf der Ordinate die Spannung und auf der Abszisse die Zeit. Abtastraten in der Größenordnung von einigen 10^9 Werten pro Sekunde (Gigasamples/s, GSa/s) bei Speicherlängen von 2000 bis 4000 Datenpunkten und bei 8 Bit Auflösung sind bei billigen Laborgeräten heute Standard. Die Oszilloskope haben in der Regel zwei Kanäle; es können also 2 $U(t)$ gleichzeitig erfasst werden. Eingebaute kalibrierte Verstärker können die Eingangssignale auf leicht digitalisierbare Spannungen verstärken, wobei typischerweise ein Zentimeter auf der Ordinate des Schirms minimal 2 mV entsprechen (Anzeige am Gerät dann 2 mV/cm). Auf der Abszisse kann eine Auflösung von deutlich unter einer Mikrosekunde pro Zentimeter erreicht werden.

Um periodische Signale fortlaufend sinnvoll darzustellen, kommt der sogenannte „Trigger“ (deutsch: Auslöser) zum Einsatz. Als Beispiel diene eine im Experiment verwendete Wechselspannung von 5 kHz, deren Amplitude sich langsam verändern soll. Man möchte dann die nacheinander aufgenommenen und nacheinander mit großer Wiederholrate auf dem Schirm dargestellten Wellenzüge $U(t)$ (Dauer z. B. 1 ms) natürlich übereinander sehen, d. h. zum Beispiel sollen die Nulldurchgänge an der gleichen Stelle liegen. Dazu dient eine elektronische Schaltung, die den Zeitpunkt t_T eines bestimmten Spannungswertes detektiert, der sogenannten Triggerschwelle, die natürlich zwischen positiver und negativer Amplitude von $U(t)$ liegen muss. Dies ist die Triggerschaltung. Der Mikroprozessor weiß dann, wie er den Datenzug auf der Zeitachse verschieben muss, damit er genau über dem zuvor dargestellten liegt. Man hat dann den Eindruck eines stehenden Bildes. Da das Gerät permanent die Eingangswerte digitalisiert („sampelt“), kann der Triggerzeitpunkt im Prinzip an beliebiger Stelle auf der Ordinate des Schirms liegen. Die bekannten Geräte bevorzugen die Mitte des Schirmes. Der Triggerzeitpunkt t_T und die

Triggerschwelle werden gewöhnlich durch kleine Pfeile an Abszisse und Ordinate markiert.

Da diese Oszilloskope „intelligent“ sind, können sie auch z. B. die Frequenz eines periodischen Signals, die Amplitude und weitere Parameter fortwährend berechnen und anzeigen. Die Anzahl der Funktionen und Möglichkeiten der Geräte ist dermaßen groß, dass hier nur die wesentlichsten Punkte erwähnt werden konnten. Ein Versuchsziel muss daher darin bestehen, dass Sie unter Anleitung durch den Versuchsbetreuer die Bedienung intuitiv selbst herausfinden.

2 Aufgaben und Hinweise

2.1 Bedienung des Oszilloskops

Lassen Sie sich vom Versuchsbetreuer in die Bedienung des Oszilloskops einweisen. Üben Sie die Bedienung des verwendeten Oszilloskops, bevor Sie die Messungen starten, indem Sie den Generator direkt an einen Oszilloskopeingang anschließen.

2.2 Messung von Spannungen und Phasenverschiebungen mit dem Oszilloskop

In den folgenden Versuchen dient ein geerdeter Frequenzgenerator als Spannungsquelle. Geerdet heißt, dass der Außenleiter der Koaxialkabel und der Koaxialbuchsen und -stecker (sogenannte BNC-Verbindungen) mit der Netzerde verbunden ist. Das Oszilloskop ist ebenfalls über das Netz geerdet. Daher kann man leicht Kurzschlüsse erzeugen, da die Außenleiter der Koaxialkabel von Oszilloskop und Generator beide mit der Netzerde verbunden sind.

Achten Sie daher im Folgenden immer auf einen gemeinsamen Erdpunkt.

2.2.1 Ohmsche Widerstände

Bauen Sie mit den vorhandenen Widerständen (für R_1 10 k Ω , für R_2 1 k Ω) eine Serienschaltung gemäß dem Schaltbild der Abbildung (7) auf. Es handelt sich um einen Spannungsteiler.

Wählen Sie als gemeinsamen Erdpunkt von Generator und Oszilloskop die Leitung unten. Zur Erinnerung: Die Außenkontakte der Koaxialbuchsen sind über den Netzanschluss miteinander verbunden.

Messen Sie die Spannungen U_{in} und U_{out} simultan mit dem Oszilloskop. Die Spannung an R_1 kann nicht

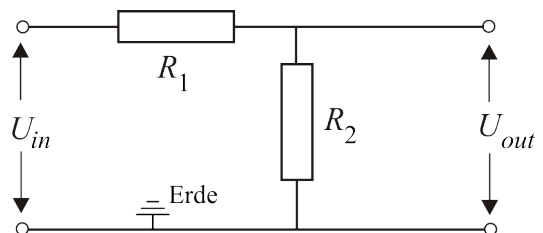


Abbildung 7: Spannungsteiler mit zwei Widerständen.

direkt gemessen werden, da einer der beiden Pole der Messleitungen zum Oszilloskop ja immer geerdet ist.

Kontrollieren Sie für verschiedene Frequenzen (10 Hz, 100 Hz, 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz) die Phasenbeziehung zwischen U_{in} und U_{out} mit dem Oszilloskop. Notieren Sie dabei die Amplitudenwerte. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Werten, die nach dem Ohmschen Gesetz zu erwarten sind.

2.2.2 Induktiver und ohmscher Widerstand, RL-Glied

Ersetzen Sie den Widerstand R_1 nach Abbildung (7) durch die kleine Spule der Induktivität L mit ca. 10 mH (siehe Abbildung (8)). Für R_2 nehmen Sie einen Widerstand mit 560 Ω .

Skizzieren Sie im Messprotokoll die Schaltung, bevor Sie sie aufbauen.

Messen Sie in diesem Teilversuch nur die Phasenverschiebung zwischen Strom und Generatorspannung als Funktion der Frequenz von 10 Hz bis 10^6 Hz. Dabei wählen Sie eine höhere Messpunktdichte im Bereich von 10^3 bis 10^5 Hz. Oberhalb von 100 kHz macht sich die unvermeidliche Parallelkapazität der Spule bemerkbar, die in den einführenden Abschnitten nicht berücksichtigt wurde.



Abbildung 8: Mit Krokodilklemmen kontaktierte kleine Spule.

Stellen Sie während der Messung Φ als Funktion des Logarithmus der Frequenz dar. Halb-logarithmisches Papier liegt bereit. Zur Erinnerung: „Halblogarithmisch“ bedeutet in diesem Fall, dass Φ auf einer linearen Skala gegen ω oder f auf einer logarithmischen Skala aufzutragen ist. Berechnen Sie nicht $\log(\omega)$ oder $\log(f)$ und tragen dies dann linear auf!

Vergleichen Sie mit Gleichung (3) indem Sie eine berechnete Kurve dem Diagramm hinzufügen.

2.2.3 Kapazitiver und ohmscher Widerstand, RC-Glied

Ersetzen Sie nun die kleine Spule der Induktivität L durch eine Kapazität C von $0,1 \mu\text{F}$ und nehmen Sie für R_2 jetzt $1 \text{ k}\Omega$. Skizzieren Sie im Messprotokoll die Schaltung bevor Sie aufbauen.

Ignorieren Sie bei dieser Messung die Phasenverschiebung und messen Sie nur die Amplituden von U_{in} (falls nicht konstant) und U_{out} als Funktion der Frequenz im gleichen Frequenzbereich wie in 2.2.2. Auch hier ist das halblogarithmische Diagramm während der Messung zu zeichnen.

Vergleichen Sie wie bei der letzten Aufgabe den gemessenen Verlauf von $U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$ mit dem nach Gleichung (5) zu erwartenden.

2.3 Parallelschwingkreis oder Sperrkreis

Messung A:

Messen Sie den Frequenzgang eines Schwingkreises nach Abbildung (5), mit $R = 560 \Omega$ und der Spule und dem Kondensator von oben. Dazu nehmen Sie wiederum den Spannungsabfall $U_R = U_{\text{out}}$ am Widerstand R und die Generatorspannung $U_{\text{Generator}} = U_{\text{in}}$ (falls nicht konstant) als Funktion der Frequenz in einem sinnvollen Bereich auf. Diesen Bereich liefert eine kleine Abschätzung mit den bekannten Bauteiledaten. Stellen Sie $U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$ als Funktion von ω (lineare Achse) in einem Diagramm während der Messung dar.

Auswertung A:

Bestimmen Sie grafisch die Resonanzfrequenz ω_{res} des Schwingkreises, natürlich mit Fehler-schranken.

Aus ω_{res} und der Kapazität C können Sie dann die Induktivität L berechnen und mit dem auf der Spule angegebenen Wert vergleichen.

Versuchen Sie, aus dem Minimum von $U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$ durch Vergleich mit der Theorie im Anhang R_L zu bestimmen. Der auf diese Weise ermittelte Wert ist mit dem in 2.2.2 angegebenen Wert zu vergleichen.

Messung B:

Verwenden Sie laut Abbildung (9) eine zweite große Spule als Induktionsspule zur relativen Messung des Stromes I_s im Schwingkreis. Das Wechsel-Magnetfeld der kleinen Spule ist proportional zu I_s . Es induziert in der großen Spule eine zu I_s proportionale Wechselspannung. Messen Sie auf diese Weise I_s (in relativen Einheiten) im gleichen Frequenzintervall wie bei der letzten Messung, die ja den Strom I_z zum Schwingkreis wiedergibt. Tragen Sie $I_s(\omega)$ geeignet skaliert in das oben angesprochene Diagramm $I_z(\omega)$ ein.

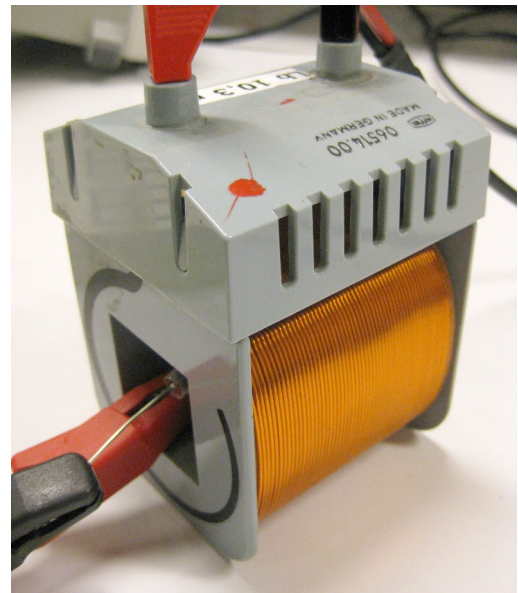


Abbildung 9: Das B-Feld der kleinen Spule induziert eine Wechselspannung in der großen.

Auswertung B:

Beschreiben und vergleichen Sie beide Kurven mit physikalischen Argumenten.

Messung C:

Vertauschen Sie die kleine und die große Spule und messen Sie den Frequenzverlauf des Resonanzstroms I_s erneut aus. Die große Spule hat fast die gleiche Induktivität wie die kleine Spule (Resonanzfrequenz!), besitzt jedoch einen wesentlich geringeren ohmschen Widerstand.

Fertigen Sie eine grafische Darstellung im gleichen Diagramm wie bei der letzten Messung an und führen einen qualitativen Vergleich mit der Theorie im Anhang durch.

Anhang

Wenngleich es in eine Praktikumsanleitung nicht passt, so soll hier doch der in Gleichung (7) berechnete Leitwert für den Parallelschwingkreis ein wenig weiter analytisch betrachtet werden. Damit werden die grundlegenden Erscheinungen der Schaltung deutlich gemacht.

Näherung ohne Spulenwiderstand

In einem ersten Schritt soll zunächst R_L in Gleichung (7) vernachlässigt werden. Dies vereinfacht die Rechnung erheblich und wird eine physikalische Interpretation ermöglichen. Danach wird R_L hinzugenommen, und es wird der Verlauf von Y_{ges} in der Nähe der Resonanzstelle diskutiert.

Mit $R_L = 0$ folgt aus Gleichung (7)

$$Y_{\text{ges}} = \frac{1}{R + \frac{-i}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}} = \frac{1}{R + \frac{i}{f(\omega)}}, \quad (9)$$

womit $f(\omega)$ definiert wurde.

In Exponentialform schreibt sich der Nenner:

$$Z_{\text{ges}} = R + \frac{i}{f} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{f^2}} \cdot e^{i\varphi}, \quad \varphi = \arctan \frac{1}{R \cdot f}, \quad (10)$$

Für den Kehrwert Y_{ges} erhält man somit das Endergebnis

$$Y_{\text{ges}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{f^2}}} \cdot e^{-i \cdot \arctan \frac{1}{R \cdot f}}. \quad (11)$$

Man stellt mit Gleichung (11) fest, dass für $f = 0$, also für $\omega = 1/\sqrt{LC} := \omega_{\text{res}}$, die Leitfähigkeit gleich Null wird. Die betreffende Frequenz ω_{res} wird **Resonanzfrequenz** genannt. Der Schwingkreis wird **Sperrkreis** genannt, wenn man den Spannungsabfall an R als Ausgangsspannung betrachtet. Diese wird bei $\omega = \omega_{\text{res}}$ gleich Null, man sagt, die betreffende „Frequenz wird gesperrt“.³

Die Phasenverschiebung $\varphi = -\arctan[1/(Rf)]$ ist weniger leicht zu diskutieren. Für $\omega \rightarrow \omega_{\text{res}}$ strebt $1/f$ gegen $+\infty$, weshalb die Phasenverschiebung zwischen Strom und Generatorspannung gegen $+90^\circ$ strebt (wobei der Strom gleichzeitig verschwindet). Rechts von der Resonanzstelle liegt $1/f \rightarrow -\infty$ vor und somit $\varphi = -90^\circ$. Dazwischen muss φ also einen Sprung machen. Für $\omega = \omega_{\text{res}}$ ist die Phasenverschiebung mathematisch ebenso unbestimmt wie physikalisch, da ja der Strom dort verschwindet.

³ ω ist die am Generator eingestellte Frequenz, ω_{res} ist eine Schwingkreiseigenschaft.

Durch $R_L \neq 0$ wird diese Sprungstelle „entschärft“, wie es physikalisch sein muss (siehe Abbildung (6)). Weiter entfernt von ω_{res} nähert sich φ jeweils von $\pm 90^\circ$ dem Wert Null an.

Nummerisch erhält man diese Ergebnisse ganz leicht, wenn man für R_L einen sehr kleinen Wert verwendet.

Soviel sei zum Phasenverlauf beschrieben. Nun soll noch ganz kurz der Betrag des Verhältnisses $T = U_{\text{out}}/U_{\text{in}} = Y_{\text{ges}} \cdot R$ nach Gleichung (11) physikalisch diskutiert werden,

$$|T| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 f^2}}} \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{\omega L} - \omega C. \quad (12)$$

Dazu ist zunächst anzumerken, dass f^2 sehr groß wird wenn ω sich weit von ω_{res} entfernt. Es ergibt sich dann $T \approx 1$. Dies kommt physikalisch daher, dass bei kleinen Frequenzen die Spule gut leitfähig ist und bei großen Frequenzen der Kondensator. Dann gilt also $|Y_{\text{ges}}| \approx 1/R_V$.

In Resonanz, also für $\omega = \omega_{\text{res}}$, ist wie erwähnt der Leitwert gleich Null, also auch T , der Kreis sperrt.

Man kann sich dann fragen, wie breit oder wie schmal der Bereich $\Delta\omega$ ist, in welchem T nennenswert von 1 abweicht. Die Breite dieses Bereiches sagt ja aus, wie frequenzselektiv der Sperrkreis ist. Als Maß für $\Delta\omega$, das auch Resonanzbreite genannt wird, nimmt man diejenigen Stellen ω_H , für die der Radikand in Gleichung (12) gleich 2 wird, das Verhältnis $|T|$ ist dort von 1 auf $1/\sqrt{2}$ abgesunken. Dieser Wert wird offenbar für $R^2 f^2 = 1$ erreicht. Setzt man f ein, so folgt

$$\Delta\omega = |\omega_{\text{res}} - \omega_H| = \left| \pm \frac{L \omega_{\text{res}}^2}{R} \right|. \quad (13)$$

Man nennt den Quotienten $Q = \omega_{\text{res}}/\Delta\omega$ die Güte des Schwingkreises. Q wird umso größer, je schmaler der Frequenzbereich ist, für den $T < 1/\sqrt{2}$ gilt. Ein ähnlicher Ausdruck gilt auch für einen Serienschwingkreis und ebenso beispielsweise für Mikrowellenresonatoren. Die Güte wird also von den verwendeten Bauteilwerten bestimmt, die im Experiment verwendeten Induktivitäts-, Kapazitäts- und Widerstandswerte sind also nicht gerade zufällig ausgesucht.

Zum Schluss soll noch kurz das Ergebnis für $R_L \neq 0$ andiskutiert werden.

Gleichung (7) kann leicht in Exponentialform gebracht werden, man erhält mit $g = 1 - \omega^2 LC$

$$Y_{\text{ges}} = \sqrt{\frac{g^2 + \omega^2 (R_L C)^2}{(R_L + R g)^2 + \omega^2 (L + R_L R C)^2}} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (14)$$

Dabei sind φ_1 und φ_2 die Phasenwinkel von Zähler und Nenner in Gleichung (7), die nicht

explizit angegeben werden sollen.

Das Ergebnis nach Gleichung (14) kann durchaus als unhandlich bezeichnet werden. Dies ist typisch für die Berechnung von Wechselstromnetzwerken, weshalb man in der Praxis auf numerische Berechnungen ausweicht, wie bereits mehrfach erwähnt. Deshalb soll hier lediglich der Betrag von Gleichung (14) in der Umgebung der Resonanzstelle diskutiert werden, denn dieser ist physikalisch besonders interessant.

Da für $\omega_{\text{res}} = 1/\sqrt{LC}$ die Funktion g gleich Null wird, sieht man, dass an dieser Stelle jetzt im Gegensatz zu oben ein $|Y_{\text{ges}}| > 0$ und damit ein von Null verschiedener Strom übrig bleibt. Der Kreis sperrt nicht mehr völlig bei $\omega = \omega_{\text{res}}$.

In der Nähe der Resonanzstelle, also bei $\omega \approx \omega_{\text{res}}$, wird g sehr klein sein. Es erfolgt dort eine Näherung des Nenners des Bruches in Gleichung (14) durch $R_L^2 + \omega^2(L + R_L R C)^2$. Der Summand $(\omega L)^2$ überwiegt den Rest, wenn R_L klein gegen die übrigen „Widerstände“ $R, \omega L, 1/(\omega C)$ ist.⁴ Dies ist bei einem „guten“ Sperrkreis gegeben. Nähert man daher den Nenner durch $(\omega L)^2$ alleine, so zeigt eine Extremwertrechnung, dass in dieser Näherung das Minimum von $|Y_{\text{ges}}|$ nach wie vor bei $\omega_{\text{res}} = 1/\sqrt{LC}$ auftritt. Der Leitwert (und damit der Strom) ist dann bei ω_{res} durch $R_L \cdot \frac{C}{L} = R_L \cdot \frac{1}{(L\omega_{\text{res}})^2}$ gegeben.

Man kann natürlich auch mit geschickten Näherungen die Güte Q des nicht-idealen Schwingkreises ($R_L \neq 0$) diskutieren, die dann auch von R_L abhängt. Dies ist ja auch plausibel, da R_L die Dämpfung des Schwingkreises erzeugt. Die Güte des Kreises oder die Breite der Resonanz ist also sowohl durch die Kopplung an den Generator mittels R als auch durch die Dämpfung via R_L gegeben. Die betreffenden Näherungen sind mühsam und die numerische Berechnung hat dies ja ohnehin schon gezeigt, sodass es hiermit belassen werden soll.

4 Je nach verwendeter Spule (kann sich im Laufe der Jahre ändern) kann $R_L R C$ auch etwa so groß wie L werden. Bei der Näherung für den Leitwert kann also L durch bis zu $2L$ zu ersetzen sein. Für die Beobachtung der grundsätzlichen Effekte spielt dies aber keine Rolle.